

# 2016학년도 목원대학교 수학교육과 1차 졸업시험

## 수 학(수학교육 영역)

1차 시험	2교시 전공A	6문항 25점	시험 시간 60 분
-------	---------	---------	------------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하십시오.
- 문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.
- 밑줄 있는 번호는 3학년이 풀 수 있는 문제입니다.

### 기입형 【1~2】

1. 반 헬레(P. van Hiele)는 학생들의 사고 발달 및 학습 수준의 상승은 학습지도에 의해 촉진될 수 있다고 생각하였다. 이에 따라 다음과 같은 교수-학습 과정을 제시하고 있다. 이 단계들을 옳은 순서로 나열하십시오.[2점]

- 가. 교사는 학습할 주제에 관한 학생의 선행지식이 무엇인지 파악하고 학생이 새로운 주제를 이해하도록 도움을 주고 질문을 하며 관찰을 수행한다.
- 나. 익숙해진 새로운 과제를 표현하는 활동을 통해 그것을 명확히 하며 관계 체계를 형성한다.
- 다. 학생은 교사가 제공하는 자료를 통해 교사의 안내 하에 학습 주제를 탐구하면서 해당 분야의 구조를 점진적으로 파악하게 된다.
- 라. 학생은 탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되어 사고 수준의 비약에 이르게 된다.
- 마. 학생은 보다 복잡한 과제에 도전하여 해결방법을 찾아봄으로써 자신만의 방식을 찾는 경험을 하게 되고 탐구분야에 정통하게 된다.

2. 스캠프(Skemp)는 피아제의 기본적인 아이디어를 수학교육심리학적 입장에서 해석하여 ‘스키마 학습’ 이론을 전개하였다. 아래 설명에서 밑줄 친 것을 쓰시오.[2점]

지능은 서로 보완적인 역할을 하는 두 수준으로 구분할 수 있다. 특히 이것은 표상과 관련된 행동에 대하여 그 결과뿐만 아니라 과정도 의식함으로써 추론과 탐구활동, 문제해결 활동을 의식적으로 지속할 수 있게 한다. 예를 들어  $16 \times 25$ 의 계산결과 뿐만 아니라 계산과정에 대한 반성을 하는 것이다.

### 서술형 【1~4】

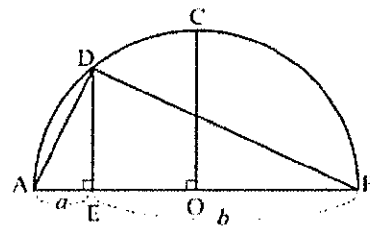
1. 다음 두 교사의 대화를 읽고 물음에 답하십시오.

김교사: 저는 오늘 학생들에게 부등식에 대해 수업해야 하는데, 좀 더 쉽게 이해하도록 하는 방법을 생각하고 있습니다.

박교사: 저는 학생들이 수학의 각 영역의 관련성을 인식하도록 가르치는 것이 바람직하다고 생각합니다. 예를 들어, (가)추상적인 식을 시각화한 자료는 식을 직관적으로 이해하게 하고 대수와 기하의 연결성을 인식하는데 도움이 되지요.

김교사: 네. 오늘 부등식을 논리적인 증명이 아니라 시각적인 자료를 이용해서 수업해보도록 하겠습니다.

김교사는 부등식  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  ( $a > 0, b > 0$ )을 가르칠 때 사용하려고 다음과 같은 자료를 준비하였다. 다음 그림이 어떻게 위의 부등식을 나타내고 있는지 설명하십시오.(단, 그림에서 점 O는 원의 중심이다.) 그리고 학교 수학에서 (가)와 관련된 예를 하나 제시하고, 제시한 예에 대한 내용을 간략히 설명하십시오. [5점]



2. 다음은 대수학 강의 시간에 박 교수와 학생이 나누는 대화의 일부분이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오.

박 교수: 지금까지 다항식 환에 대한 다음 정리를 증명하였습니다.

<정리>

$F$ 가 체이면 다항식 환  $F[x]$ 가 주 아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.

학생 A: 네. 체 위에서의 다항식 환이 주 아이디얼 정역임을 이해하였습니다.

박 교수: 이 정리를 출발점으로 하여, ㉠브라운(S. Brown)과 월터(M. Walter)가 제시한 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될까(What if not)' 전략에 따라 수업을 진행하고자 합니다.

그럼, 이 전략에 따라 새로운 문제를 만드는 단계까지 진행하고 그 결과를 발표해 봅시다.

학생 B: 앞의 정리를 바탕으로 다음과 같은 새로운 명제를 만들었습니다.

<명제>

다항식 환  $R[x]$ 가 주 아이디얼 정역이면  $R$ 는 체이다.

박 교수: 참 잘 만든 명제입니다. 사실 이 명제는 참입니다. 이제 이 명제를 증명해 봅시다.

위의 수업에서 2015 개정 수학과 교육과정이 제시하는 문제 해결 능력 함양을 위한 교수 학습에서 어떤 사항을 반영하고 있는지 쓰시오. 그리고 학교수학의 내용 중 한 가지의 예를 들어, ㉠의 단계에 따라 일반화될 수 있음을 구체적으로 설명하시오. [6점]

3. 다음은 무한수열의 수렴에 관한 수업에 앞서 최 교사가 교과서와 교사용지도서를 분석하면서 기록한 내용이다.

- ① 교과서에서는 직관적이고 자연스러운 사고에 따라 무한수열의 수렴을 정의한다.
- ② 바이어슈트라스(Weierstrass)는 엄밀하지만 자연스러운 사고에 역행하는 방식으로 무한수열의 수렴을 정의하였다.

①과 ②에서의 '무한수열의 수렴의 정의'를 각각 제시하고, 이를 토대로 최 교사가 ②에서 '자연스러운 사고에 역행한다'고 판단하는 근거를 쓰시오. [5점]

4. 고등학교 '확률과 통계' 시간에 학생들에게 다음과 같은 조건부 확률에 대한 문제를 풀도록 하였다.

10개의 제비 중 4개가 당첨제비라고 한다. 갑이 먼저 제비를 뽑고, 을이 두 번째로 제비를 뽑는다고 할 때, 다음을 구하시오. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

- (1) 갑과 을이 모두 당첨제비를 뽑을 확률은?
- (2) 갑이 당첨제비를 뽑았을 때, 을이 당첨제비를 뽑을 확률은?
- (3) 을이 당첨제비를 뽑았을 때, 갑이 당첨제비를 뽑았을 확률은?

위의 문제 중 (3)에 대해 철수는 다음과 같이 답안을 작성하였다.

이유: 갑의 사건이 먼저 일어났으므로...  
이문제에서는 을의 사건과는 무관하다  
그러므로  $\frac{4}{10}$ 이다.  
갑이 당첨제비를 뽑을 확률  
답:  $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

철수가 위와 같이 오류를 보인 원인은 무엇인지 쓰시오. 그리고 조건부 확률의 기초적인 아이디어인 일반적인 베이즈 정리를 쓰고 이에 대한 의미를 약술하시오. [5점]

# 2016학년도 목원대학교 수학교육과 1차 졸업시험

## 수 학(대수 영역)

1차 시험	2교시 전공A	8문항 25점	시험 시간 60 분
<ul style="list-style-type: none"> <li>문제지 전체 면수가 맞는지 확인하십시오.</li> <li>문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.</li> <li><u>밑줄</u> 있는 번호는 3학년이 풀 수 있는 문제입니다.</li> </ul> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <b>기입형 【1~4】</b> </div> <p><u>1.</u> 유클리드 공간 <math>\mathbb{R}^2</math>의 순서기저 <math>B = \{(1,1), (1,-1)\}</math> 과 선형변환 <math>T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(X) = \{(1,2) \bullet X\}(3,4), X \in \mathbb{R}^2</math>가 주어질 때, 기저 <math>B</math>에 관한 행렬 <math>[T]_B</math>를 구하십시오. (내적 <math>\bullet</math>은 표준 내적이다.) [2점]</p> <p><u>2.</u> 2016과 1946의 최대공약수 <math>d</math>를 구하고 <math>d = 2015x + 1946y</math>인 정수 <math>x, y</math>를 구하십시오. [2점]</p>		<p><u>3.</u> 군 <math>G = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{18}</math>의 원소 <math>(4,6)</math>에 의해 생성된 부분군을 <math>H</math>라 하자. 잉여군 <math>G/H</math>의 원소 <math>(5,3)+H</math>의 위수를 구하십시오. [2점]</p> <p><u>4.</u> 유리수체 <math>\mathbb{Q}</math> 위의 다항식 <math>f(x) = x^3 + 1</math>의 분해체를 <math>K</math>라 할 때, 갈로아군 <math>G(K/\mathbb{Q})</math>와 자기 자신이 아닌 동형인 군을 구하십시오. [2점]</p>	

서술형 【1~4】

1. 2차 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 을 대각화하는 행렬  $P$ 를 구하시오.[4점]

2. 연립 합동식  $\begin{cases} 6x \equiv 6 \pmod{24} \\ 5x \equiv 7 \pmod{26} \end{cases}$ 의 해를 구하시오.[4점]

3. 유리수환  $\mathbb{Q}$  상의 다항식환  $R = \mathbb{Q}[x]$ 와 복소수환  $\mathbb{C}$ 에 대하여 함수

$$\phi: R \rightarrow \mathbb{C}, \phi(f(x)) := f(\sqrt{3}i)$$

은 환준동형사상이다. 이 때  $I = \ker(\phi)$ 을 구하고 잉여환  $R/I$ 은 체가 됨을 보이시오.[4점]

4. 유리수체  $\mathbb{Q}$  위의 다항식  $f(x) = x^3 - x + 1$ 이  $\mathbb{Q}$  위에서 기약임을 보이고,  $f(x)$ 의 한 근을  $\theta$ 라 할 때,  $\mathbb{Q}$  위의 대수적 확대체  $\mathbb{Q}(\theta)$ 의 원소  $\theta^2 - 2$ 의 곱셈에 대한 역원  $(\theta^2 - 2)^{-1}$ 을 구하시오.[5점]

# 2016학년도 목원대학교 수학교육과 1차 졸업시험

## 수 학(해석 영역)

1차 시험	2교시 전공A	8문항 28점	시험 시간 60 분
-------	---------	---------	------------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하십시오.
- 문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.
- 밑줄 있는 번호는 3학년이 풀 수 있는 문제입니다.

**기입형 【1~4】**

1. 멱급수  $\sum a_n x^{2n}$ 의 수렴반경을  $R(\neq 0, \infty)$ 이라 할 때, 멱급수  $\sum n a_n x^n$ 의 수렴반경을 구하십시오.[2점]

2. 특이적분  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ 의 값을 구하십시오.[2점]

3.  $C$ 가 원  $|z-1|=1$ 일 때, 수열  $\langle a_n \rangle$ 을

$a_n = \oint_C \frac{z}{(z-1)^n} dz \quad (n \in \mathbb{N})$ 으로 정의하자.  $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 의 값을 구하십시오. (단, 선적분에서 곡선의 향은 시계반대방향으로 한다.)[2점]

4. 복소평면에서 곡선  $C$ 를  $C: |z-\sqrt{3}|=2$ 라 하자.

이 때, 선적분  $\oint_C \frac{z}{z^6-1} dz$ 의 값을 구하십시오. (단, 선적분에서 곡선의 향은 시계반대방향으로 한다.)[2점]

서술형 【1~4】

1. 연속인 실함수  $f$ 와 코시수열  $\langle a_n \rangle$ 에 대하여 수열  $\langle f(a_n) \rangle$ 이 항상 코시수열이 되는 것은 아니다.  $\langle f(a_n) \rangle$ 이 코시수열이 되지 못하는 연속인 실함수  $f$ 와 코시수열  $\langle a_n \rangle$ 의 예를 제시하고 그 이유를 설명하시오.[4점]

2. 복소평면  $\mathbb{C}$ 에서 해석적인 정함수  $f$ 가 임의의  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|f(z)| \geq 1$ 을 만족한다.  $f(0)=1$ 일 때,  $f$ 가 상수함수  $f(z)=1$ 임을 보이시오.[4점]

3. 양의 함수값을 갖는 연속함수  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ 의 특이 적분  $\int_0^\infty f(x)dx$ 가 수렴할 때, 함수  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)ds dt$ 는 평등연속임을  $\epsilon - \delta$ 를 이용하여 보이시오.[4점]

4. 실함수  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & , x = \frac{q}{p} (p \text{와 } q \text{는 서로 소인 자연수}) \\ 0 & , x = 0 \text{ 또는 } x \text{가 무리수} \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (1)  $f$ 의 불연속점을 모두 구하시오. [기입형] [2점]  
 (2) 임의의 양수  $\epsilon$ 에 대하여  $f$ 의 리이만 상합

$$U(f, \Delta) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} < x < x_i} f(x)$$

이  $\epsilon$ 보다 작아지는  $[0, 1]$ 의 분할

$$\Delta = \{x_i \mid x_0 = 0, x_n = 1, x_i < x_{i+1}, i = 0, \dots, n\}$$

를 제시하고 설명하시오.[서술형] [4점]

- (3) 리이만 적분  $\int_0^1 f(x)dx$ 의 값을 구하시오.[기입형][2점]

# 2016학년도 목원대학교 수학교육과 1차 졸업시험

## 수 학(위상 • 미기 • 이산 • 확통 영역)

1차 시험	2교시 전공A	9문항 26점	시험 시간 60 분
-------	---------	---------	------------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하십시오.
- 문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.
- 밑줄 있는 번호는 3학년이 풀 수 있는 문제입니다.

### 기입형 【1~5】

1. 정수 집합  $\mathbb{Z}$ 에 대하여  $A_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq n\}$ 이라 하자.

$\beta = \{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 을 기저로 하는  $\mathbb{Z}$ 상의 위상을  $\mathcal{T}$ 라 하고  $X = (\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ 라 두자. 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ 을  $f(x) = [x]$ 으로 정의하고  $\mathbb{R}$ 상의 위상  $\mathcal{T}_1$ 을  $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{T}\}$ 으로 정의하자. 이 때 위상공간  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ 에서 집합  $A = (-1, 1)$ 의 폐포  $\overline{A}$ 를 구하십시오.[2점]

2. 실수 집합  $\mathbb{R}$ 상에서  $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 을 기저로 하는 위상을  $\mathcal{T}$ 라 할 때 위상공간  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 에서  $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 을 포함하는 연결성분을 구하십시오.[2점]

3. 3차원 유클리드공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 두 곡면

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} \mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v), \\ (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

의 교선을  $\gamma$ 라 하자. 이 때 점  $p = (1, 0, 0)$ 에서  $\gamma$ 의 단위 접벡터를 구하십시오.[2점]

4. 앞면이 나올 확률이  $p$  ( $0 < p < 1$ )인 동전을 학생 A가  $n$ 번 던지고 학생 B가  $2n$ 번 던진다. 학생 A가 던져서 앞면이 나온 횟수와 학생 B가 던져서 앞면이 나온 횟수의 합이 2일 때, 학생 A가 던져서 앞면이 나온 횟수가 1일 확률이  $\frac{8}{17}$ 이다.  $n$ 의 값을 구하십시오.[2점]

5. 두 연속확률변수  $X, Y$ 가 서로 독립이고, 확률밀도함수(probability density function)가 각각

$$f_X(x) = e^{-x} \quad (x > 0),$$

$$f_Y(y) = e^{-y} \quad (y > 0)$$

이다. 확률변수  $Z = X + Y$ 의 확률밀도함수  $g(z)$ 를 구하십시오.[2점]



**서술형 【1~4】**

1. 실수 집합  $\mathbb{R}$  상에서 위상  $\mathcal{T}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U \text{ 는 가산집합}\} \cup \{\emptyset\}$$

이 때 위상공간  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 이 콤팩트공간인지 판별하고 그 이유를 서술하시오.[4점]

2. 자연수 집합  $\mathbb{N}$ 과 자연수  $n$ 에 대하여  $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$ 이라 하자.  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 을 기저로 하는  $\mathbb{N}$ 상의 위상을  $\mathcal{T}$ 라 하고  $X = (\mathbb{N}, \mathcal{T})$ 라 두자. 실수 집합  $\mathbb{R}$ 상의 보통위상을  $T$ 라 하고  $Y = (\mathbb{R}, T)$ 이라 하자. 이 때 집합  $\{f \mid f: X \rightarrow Y \text{ 는 연속함수}\}$ 을 구하시오.[4점]

3. 3차원 유클리드공간  $\mathbb{R}^3$ 의 곡면  $M$ 의 점  $p$ 에서 다음 조건들이 성립할 때, 점  $p$ 에서의 가우스 곡률  $K(p)$ 의 값을 구하시오.[4점]

- (1)  $K(p) < 0$
- (2) 점  $p$ 를 지나는 서로 다른 두 개의 점근곡선이 존재하고 이들은 서로 수직이다.
- (3) 점  $p$ 에서 법곡률의 최댓값은 1이다.

4. 농구선수 5명의 점수가 20점일 경우의 수를 구하시오. 단, 모든 선수는 10점 이하의 점수만을 기록하였다. (답은 계산하지 않아도 됨)[4점]