

수 학

수험 번호 : ()

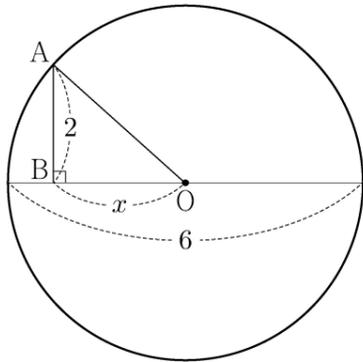
성 명 : ()

제1차 시험	3 교시 전공B	11문항 40점	시험 시간 90분
--------	----------	----------	-----------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
- 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 다음은 윤 교사와 강 교사가 수업을 반성하는 대화의 일부이다.

윤 교사: 그림과 같이 지름의 길이가 6인 원 O 위의 점 A에서 지름에 내린 수선의 발을 B라 하고, $\overline{AB}=2$ 일 때, 원의 중심 O에서 점 B까지의 거리 x 의 값을 구하게 하였더니 어떤 학생이 x 의 값을 구하지 못하더군요. 피타고라스 정리를 알고 이차방정식을 비교적 잘 푸는 학생임에도 불구하고 말이지요.



강 교사: ㉠ 선분 OA를 직각삼각형 OAB의 빗변으로 보면서 동시에 원 O의 반지름으로 보는 것과 같이 문제의 내적인 구조적 관련성을 파악하는 과정이 없었던 것이 아닐까요?

윤 교사: 저도 그렇게 생각합니다. ㉡ 전체에 대한 부분의 구조적 기능이 파악되어 '구조의 개선적 변화'가 일어나는 지적 과정에 더욱 관심을 기울여야겠다는 생각을 하게 되었습니다.

형태심리학에서 ㉠을 설명하는 용어와 베르트하이머(M. Wertheimer)가 ㉡을 설명하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점]

2. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에서 정의된 두 위상 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $|\mathcal{T}_1| = |\mathcal{T}_2| = 4$
- (나) (X, \mathcal{T}_1) 은 연결공간(connected space)이다.
- (다) (X, \mathcal{T}_2) 은 비연결공간(disconnected space)이다.

이때 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 를 각각 1개씩 구하시오. (단, $|A|$ 는 집합 A의 원소의 개수이다.) [2점]

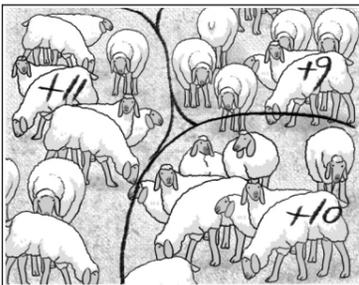
3. 다음은 김 교사가 베커(A. Bakker)의 통계 교육 이론에 기초하여 중학교 3학년 통계 단원 수업을 한 후 작성한 수업일지의 일부이다.

나는 도입 단계에서 다음과 같은 <자료>를 학생들에게 제시하며 통계가 현실과 단절된 수량적인 자료의 계산 체계가 아님을 알려주고자 하였다.

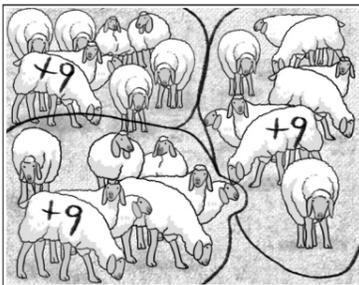
<자료>

어느 학자에 따르면, 역사적으로 평균 개념은 큰 수를 대략적으로 추정하기 위한 상황에서 활용되었다고 한다. 고대 인도의 이야기 속 주인공은 나무 한 그루에 달린 나뭇잎과 과일의 총수를 알아보기 위해 우선 평균 크기의 나뭇가지를 선택하고, 그 나뭇가지에 달린 나뭇잎과 과일 수를 헤아린 후 전체 나무에 달린 나뭇잎과 과일 수를 추정하였다.

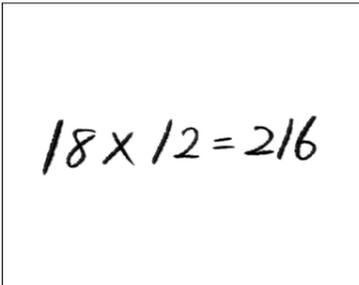
본시 학습에서는 그림 속 양의 개체수를 추정하는 활동 과제를 제시하였다. 각각의 학생들은 자신만의 큰 수 추정 방법을 활용하여 몇 마리의 양이 있는지를 (a), (b), (c), (d)와 같이 찾아내었다.



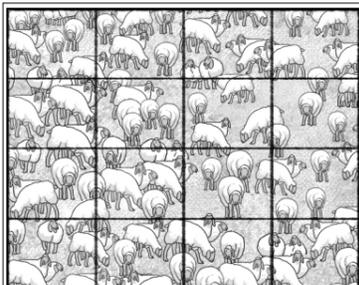
(a) 묶음을 만들어서 각 묶음에 실제로 몇 마리의 양이 있는지 세어 합하였다.



(b) 하나의 수를 먼저 정한 후, 그 수만큼의 양이 들어 있는 묶음을 표시하고 그 크기의 묶음이 몇 개인지를 어렵 하여 계산하였다.



(c) 그림의 위쪽 모서리와 오른쪽 모서리를 따라 각각 양의 수를 구한 후, 그 두 수를 곱하여 전체 양의 수를 어렵 하였다.



(d) 격자를 만들어 격자 속 양의 수가 평균적인 것에 해당 되는 것을 고른 후 그 안에 들어 있는 양의 수를 세어 격자의 수에 곱하였다.

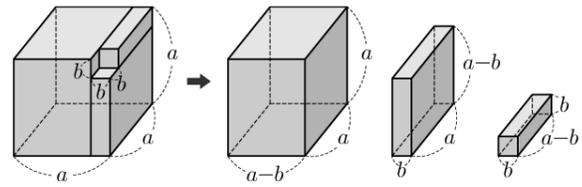
㉠ 학생들은 통계의 주요 개념의 역사를 살펴보면서 주어진 상황을 탐색하고, 상황 속 문제 해결의 방법을 배웠다.

베커의 이론에 기초한 통계 수업을 진행할 때 얻을 수 있는 교육적 의의를 위 수업일지에 근거하여 2가지 제시하시오. 그리고 ㉠과 관련지어 (a)와 (d)를 비교하여 설명하시오. [4점]

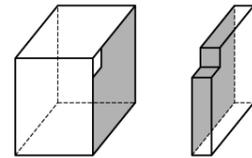
4. 다음은 최 교사가 고등학교 '수학'에서 다루는 내용을 소재로 수학 동아리 학생들과 진행할 수업에 대하여 정 교사와 나눈 대화의 일부이다.

최 교사: '수학자처럼 꼼꼼해지기'라는 주제로 동아리 학생들과 수업을 진행하려고 합니다. 아래의 **탐구**를 소재로 삼아 수업을 하려고 하는데요. 수업 준비를 위해 어떤 사고 실험을 할 수 있을까요?

탐구 다음 도형을 이용하여 인수분해 공식 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 이 성립함을 설명해 보자.



정 교사: "a, b, a-b가 양수이다.", "입체도형을 분리하여 만든 새로운 입체도형들의 부피의 합은 분리하기 전 입체도형의 부피와 같다.", "도형을 분리할 때 새로 생성된 면은 부피에 영향을 주지 않는다." 등 여러 가지 숨겨진 가정을 생각해 보고 그 가정을 학생이 찾아내도록 하는 발문도 생각해 보면 좋겠습니다.

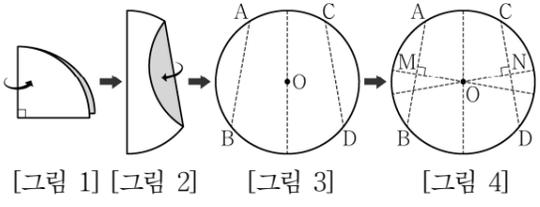


최 교사: "직육면체의 부피를 V, 밑면의 넓이를 S, 높이를 h라고 할 때, $V=Sh$ 이다."라는 것도 **탐구**에서 사용됩니다. 학생들이 이 공식을 배운 시점에서는 유리수 범위에서만 수를 다루었기 때문에 ㉠ 모서리의 길이 중 하나 이상이 양의 무리수인 경우에 대해서 이 공식 $V=Sh$ 를 정당화하는 과정도 생각해 보면 좋겠습니다.

정 교사: 직육면체 모서리의 길이가 양의 유리수인 경우, 모서리의 길이가 1인 정육면체를 적절하게 등분하여 만든 작은 정육면체를 여러 개 사용하여, 주어진 직육면체를 구성하는 과정을 이용해 이 공식을 정당화할 수 있습니다. 하지만 모서리의 길이 중 하나 이상이 양의 무리수인 경우에는 이 공식을 체계적으로 정당화하기 위해 여러 가지 배경 지식이나 소양이 필요하기 때문에 학생 수준을 고려하여 수업을 준비하여야 할 것 같습니다.

프로이덴탈(H. Freudenthal)이 말하는 사고 실험의 의미를 설명하고, ㉠에 대한 최 교사의 사고 실험을 수업 내용에 중점을 두고 예상하여 서술하시오. [4점]

5. 다음은 김 교사가 계획한 중학교 3학년 원의 현에 대한 단원의 교수·학습 지도안의 일부이다.

학습 목표	원의 현에 관한 성질을 이해한다.
단계	교수·학습 활동
도입	<ul style="list-style-type: none"> • 준비 학습: 전시 학습을 상기하도록 안내한다. • 동기 유발: 실생활에서 원의 성질을 응용한 여러 사례를 살펴본다. • 본시 학습 목표를 확인한다.
전개	<ul style="list-style-type: none"> • 다음 활동에 학생들이 자발적으로 참여하도록 유도한다. <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>① [그림 1]과 같이 원 모양의 색종이를 완전히 포개어지도록 반으로 두 번 접어 원의 중심 O를 찾는다.</p> <p>② 다시 처음 상태에서 색종이를 반으로 접고 [그림 2]와 같이 접은 후 펼친다.</p> <p>③ [그림 3]과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡는다.</p> <p>④ 점 A와 점 B, 그리고 점 C와 점 D가 서로 겹치도록 색종이를 각각 접었다 펼친 후, [그림 4]와 같이 현 AB의 중점 M과 현 CD의 중점 N을 찾는다.</p>  <p>[그림 1] [그림 2] [그림 3] [그림 4]</p> <p>⑤ $\overline{OM} = \overline{ON}$임을 확인한다.</p> </div>
	<ul style="list-style-type: none"> • 친구들과 자유롭게 토의·토론하면서 [활동1]을 통해 '길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.'는 성질을 학생이 정리할 수 있도록 허용적인 분위기를 조성한다. • 학생이 정리한 현에 관한 성질에서 '원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.'는 성질을 재구성해 보도록 안내한다. • 현에 관한 성질을 연역적으로 논증하기 등 학생 수준에 맞게 정당화 방법을 활용한다.
정리	<ul style="list-style-type: none"> • 본시 학습 내용을 정리한다. • 다음 차시를 예고한다.

딘즈(Z. Dienes)가 제안한 수학 학습 원리 중 1가지를 사용하여 교수·학습 지도안의 전개 단계를 [활동1] → [활동2]로 실행하려는 이유를 설명하시오. 그리고 [활동2] 과정 없이 '도입 → 전개([활동1]) → 정리'로 수업을 진행한다고 했을 때 김 교사의 수업을 피아제(J. Piaget)의 반영적 추상화의 메커니즘과 관련지어 평가하시오. [4점]

6. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $A = PDP^{-1}$ 을 만족하는

행렬 $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ 와 가역행렬 P 를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 행렬 A^n 의 2행 3열의 성분을 구하시오.

(단, $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ 이고 n 은 자연수이다.) [4점]

7. 연속함수 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 은 $(0, 1)$ 에서 미분가능하다.
모든 $x \in (0, 1)$ 에 대하여 $f'(x) \neq 1$ 일 때, $f(a) = a$ ($0 \leq a \leq 1$)을
만족하는 a 가 유일하게 존재함을 증명하시오. [4점]

8. 복소함수 $f(z) = z^6 - 1$ 에 대하여

$$\int_C \frac{z^3 f'(z)}{f(z)} dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

여기서 C 는 복소평면에서 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 중심으로 하고 반지름의
길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선이다. [4점]

9. X_1, X_2, X_3 을 균등분포(uniform distribution) $Unif(0, 1)$ 로부터의 확률표본(random sample)이라 하고, Y 를 X_1, X_2, X_3 의 중앙값(median)이라 하자.

이때 Y 의 누적분포함수(cumulative distribution function)와 Y 의 확률밀도함수(probability density function)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

10. 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선

$$\gamma(u) = (0, u^4 - 2u^2 + 5, u) \quad (u \in \mathbb{R})$$

를 z 축을 중심으로 360° 회전시켜 얻은 회전체를 M 이라 하고, M 의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 K 라 하자. 영역

$$S = \{(x, y, z) \in M \mid -1 \leq z \leq 1\}$$

에 대하여 $\iint_S K dA$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

11. 유리수체 \mathbb{Q} 위에서 다항식 $x^5 + 5$ 의 분해체(splitting field)를 K 라 하자. 체 $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{5})$ 가 K 의 부분체임을 증명하고, K 의 원소

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{\frac{3\pi}{5}i}$$

의 \mathbb{Q} 위에서의 기약다항식(irreducible polynomial) $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i = \sqrt{-1}$) [4점]

<수고하셨습니다.>