

3. 환(ring) \mathbb{Z}_{11} 에서 모든 단원(unit, unit element)들의 집합 \mathbb{Z}_{11}^* 는 순환군(cyclic group)이다. \mathbb{Z}_{11}^* 의 생성원(generator)을 모두 쓰시오. [2점]

4. 두 확률변수 X 와 Y 의 결합확률질량함수(joint probability mass function)가 다음과 같다.

$X \backslash Y$	1	2	3	4
0	p	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	q

X 의 기댓값이 $E(X) = \frac{11}{12}$ 일 때, $p \times \frac{1}{q}$ 의 값과 조건부확률 $P(X+Y \leq 4 | Y-X=2)$ 의 값을 순서대로 쓰시오. [2점]

5. 다음은 ○○고등학교의 학생회가 주최하는 행사의 포스터를 보고 두 교사가 나누는 대화이다.

이웃 사랑 챌린지

학생 여러분, 우리 학교의 한 학생이 난치병에 걸렸는데 치료를 위해서는 30,000,000원이 필요하다고 합니다. 학생회에서는 치료비 마련을 돕기 위해 이웃 사랑 챌린지를 계획하였습니다. 챌린지는 참가자가 줄넘기 300회 미션을 수행한 후 두 명을 지목하면, 지목받은 참가자들이 미션을 수행하고 각자 또 두 명을 지목하는 방식으로 진행됩니다. 난치병 협회의 후원을 받아 참가자 한 명당 기부금 10,000원이 적립됩니다. 학생회장이 첫 참가자로서 챌린지를 시작할 예정입니다. 교내외에 많이 홍보해 주세요.

○○고등학교 학생회

윤 교사: 학생들이 자발적으로 좋은 일을 하고 있네요 선생님들도 동참해야겠어요.

강 교사: 네, 학생들이 정말 대견하네요 저는 이 행사를 홍보하고 추진하는 데 도움을 주고자 수학 수업에서 이 내용을 다뤄 보고자 해요.

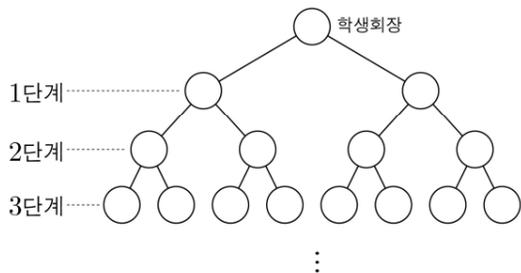
윤 교사: 어떻게요?

강 교사: ㉠ 크라벤담(H. Krabbendam)의 그래프에 대한 질적 접근 관점에서 이웃 사랑 챌린지가 진행되는 상황을 다루는 수업을 해 볼까 합니다.

윤 교사: 그 후에 ㉡ 그래프를 좀 더 정확하게 표현하는 정교화 활동을 하면 어떨까요?

강 교사: 네, 수업에 반영해 보겠습니다.

윤 교사: 저도 이웃 사랑 챌린지를 수업에서 다뤄 봐야겠어요. 학생들이 기획한 이웃 사랑 챌린지를 실세계 현상으로 하여 30,000,000원을 모으려면 최소 몇 단계까지 미션을 수행해야 하는지 알아보게 하는 거죠. 물론 학생들이 계획한 대로 이상적으로 진행된다고 가정해서요.



그러면 학생들이 수학적 모델을 만들고 분석해서 수학적 결과를 생성한 후 현상에 맞게 결론을 도출하게 될 거예요.

강 교사: 학생들이 수학적 모델링도 경험할 수 있는 좋은 아이디어 같아요.

밑줄 친 ㉠에 포함해야 할 활동을 서술하고, 밑줄 친 ㉡의 예를 1가지 제시하시오.

또한, 윤 교사의 수업에서, 이웃 사랑 챌린지가 이상적으로 진행된다고 가정할 때 학생들이 실세계 현상으로부터 만들어야 할 수학적 모델과 도출해야 하는 결론을 각각 쓰시오. [4점]

6. 다음은 수학사의 활용에 대해 논의하고 있는 교사들의 대화이다.

박 교사: 수학사를 수업에서 활용하는 방법에는 어떤 것이 있을까요? 각자의 경험을 함께 얘기해 봅시다.

최 교사: 저는 수학자들의 이야기를 해 주면서 학생들의 흥미를 유발한 적이 있습니다. “우리는 언제부터 문자를 사용해서 방정식을 나타내고 풀게 되었을까?”라고 질문하면서, 아주 옛날에는 문제의 풀이를 일상 언어만으로 기술했지만 약 3세기 디오판토스(Diophantus) 이후 미지수를 문자로 표현하였고, 16세기 프랑스의 수학자 비에트(F. Viète) 이후 ㉠ 방정식에서 문자의 사용 범위가 확대되었다는 이야기를 해 주었습니다.

김 교사: 저는 학생들에게 피타고라스 정리가 성립함을 설명하는 방법이 많다고 얘기해 주면서, 인도의 수학자 바스카라(A. Bhaskara)가 제시한 그림에서 피타고라스 정리가 왜 성립하는지 알아보는 활동을 하게 한 적이 있어요. 수학사를 소재로 학생들이 피타고라스 정리를 탐구할 수 있었죠.

박 교사: 수학사를 수업에 활용하는 또 다른 방법이 있을까요?

최 교사: 교육과정 내용을 재구성할 때도 수학사를 참고할 수 있어요. ㉡ 수학을 발생한 것으로 파악하고 학습자가 학습 과정에서 수학의 발생을 경험하게 하는 원리에 따라세요. 퇴플리츠(O. Toeplitz)의 『미분적분학』에서 이 원리를 반영하고 있죠.

김 교사: ㉢ 퇴플리츠와 방식은 다르지만 프로이덴탈(H. Freudenthal)도 수학사를 교육적으로 활용해야 한다고 했어요.

박 교사: 선생님들과 이야기하다 보니 수학사를 수업에 활용하는 방법을 더 연구해야겠다는 생각이 드네요.

방정식의 일반해를 나타낼 수 있게 되었다는 점에서 밑줄 친 ㉠의 확대된 문자의 사용 범위를 구체적으로 쓰시오.

또한, 밑줄 친 ㉡이 뜻하는 용어가 무엇인지 쓰고, 밑줄 친 ㉢에서 ‘수학사를 교육적으로 활용’한다는 것의 의미를 설명하시오. [4점]

7. $|x| < 1$ 인 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 의 값을 쓰시오. [4점]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

$$|x| < 1 \text{인 실수 } x \text{에 대하여 } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{이다.}$$

8. 꼭짓점의 집합이 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 이고 변(edge)의 집합이 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 인 단순그래프(simple graph) G 에 대하여, 4차 정사각행렬 $B = (b_{ij})$ 를

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_i \text{와 } e_j \text{가 근접(incidence)한 경우}) \\ 0 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

로 정의하자. d_i 가 꼭짓점 x_i 의 차수(degree)이고 G 의 인접행렬(adjacency matrix) A 에 대하여

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} - A$$

일 때, L 의 행렬식(determinant)의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, 꼭짓점 x_1 에서 꼭짓점 x_4 로 가는 길이가 4인 길(경로, walk)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

9. 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 점 $\alpha(t)$ 에서의 곡률(curvature)과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 $\kappa_\alpha(t)$, $\tau_\alpha(t)$ 라 할 때, $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ ($t \in \mathbb{R}$)이고 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는

$$\tau_\alpha(t) = f(t)\kappa_\alpha(t), \quad f(1) = \sqrt{3}, \quad f'(1) = -2$$

를 만족한다. 점 $\alpha(t)$ 에서 곡선 α 의 단위접벡터장(unit tangent vector field) $T(t)$ 와 단위중법벡터장(unit binormal vector field) $B(t)$ 에 대하여 곡선 $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을

$$\beta(t) = \int_0^t \{\tau_\alpha(s)T(s) + \kappa_\alpha(s)B(s)\} ds$$

로 정의하고, 이 곡선 위의 점 $\beta(t)$ 에서의 곡률을 $\kappa_\beta(t)$ 라 하자. 이 때, 곡선 β 가 정칙곡선(정규곡선, regular curve)임을 보이고, $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

10. 복소평면에서 중심이 i 이고 반지름의 길이가 2인 원을
시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C 에 대하여 선적분

$$\int_C \left\{ \frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)} + \bar{z} \right\} dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수이다.)
[4점]

11. 3차 정사각행렬 $A = (a_{ij})$ 가

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

을 만족할 때, A 의 고유값(eigenvalue)을 모두 쓰시오.
또한, $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

12. $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi}{75}i})$ 는 유리수체 \mathbb{Q} 위에서

다항식 $(x^3 - 2)(x^{25} - 1)$ 의 분해체(splitting field)이다.

갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$ 의 위수(order)를 쓰시오.

또한, 다음 <조건>을 모두 만족하는 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 부분군(subgroup) H_1 과 H_2 가 존재함을 보이시오. (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4점]

<조 건>

- (가) H_1 과 H_2 는 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 정규 부분군(normal subgroup)이다.
- (나) H_1 의 위수는 20이고 H_2 의 위수는 6이다.
- (다) $G(K/\mathbb{Q}) = H_1H_2$ 이다.

<수고하셨습니다.>