2023학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : (　　　　　　　　)　　　　　　　　성 명 : (　　　　　　　)

제1차 시험	3 교시 전공B	11문항 40점	시험 시간 90분

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 다음은 라카토스(I. Lakatos)의 오류주의 수리철학에 대한 두 교사의 대화의 일부이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점]

> 최 교사 : 라카토스는 수학의 중요한 개념들이 보조정리합체법을 사용하면서 나온 경우가 있다고 하였습니다.
>
> 이 교사 : 그렇습니다. 라카토스는 그러한 개념을 (㉠) 개념이라 불렀는데요. 어떤 추측에 대한 반례가 나왔을 때, 증명을 분석하는 활동을 통해 감추어진 보조정리를 드러내어 원래의 추측에 합체하는 과정 속에서 나오는 개념이라 그렇게 명명한 것으로 알고 있습니다.
>
> 최 교사 : 수학의 역사에서 볼 때, 평등수렴(균등수렴, uniform convergence) 개념이 그러한 (㉠) 개념의 대표적 사례라 할 수 있을 것 같습니다. “각 항이 연속함수인 함수항 급수가 수렴하면 그 극한함수도 연속이다.”라는 추측에 대한 반례가 나왔을 때, 증명을 분석하는 활동을 통해 평등수렴 개념을 도출한 것이지요.
>
> 이 교사 : 이러한 수학 지식의 발달 과정을 토대로 하여, 라카토스는 증명에 독특한 성격을 부여했습니다. 그는 증명에 대해 ‘비판을 용이하게 하는 일종의 사고실험’이라 하였는데, 이것은 수학과 과학 사이의 유사성을 드러내기 위한 것이라 할 수 있습니다.
>
> 최 교사 : 맞습니다. 라카토스 본인도 두 학문이 발달하는 과정 사이의 유사성에 대해 강조한 적이 있습니다. 과학적 지식이 생성되는 과정과 유사한 방식으로, 수학적 지식은 추측−증명−반례의 등장−증명분석−추측의 개선과 새로운 개념의 출현이 끊임없이 반복되면서 발전하기에, 라카토스는 수학을 (㉡) 과학이라 부른 적이 있습니다.
>
> 이 교사 : 그러고 보니, 라카토스의 오류주의 수리철학을 흔히 (㉡)주의 수리철학이라 부르는 것도 일리가 있네요.

2. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 거리함수 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$d(P,Q) = \begin{cases} \| P \| + \| Q \|, & \| P \| \neq \| Q \| \\ \| P - Q \|, & \| P \| = \| Q \| \end{cases}$$

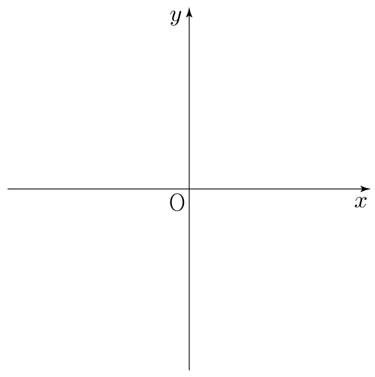
거리공간 $(\mathbb{R}^2, d)$에서 열린집합(open set)

$$A = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, (2,0)) < 4 \},$$

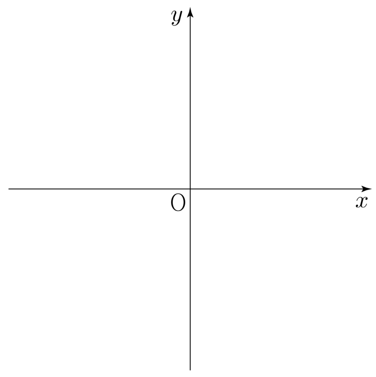
$$B = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, (2,0)) < 1 \}$$

을 좌표평면에 그림으로 순서대로 나타내시오.
(단, $\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.) [2점]

집합 A



집합 B

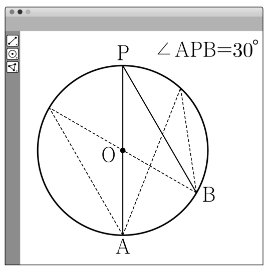


3. (가)는 김 교사가 탐구형 소프트웨어를 활용하여 원주각의 성질을 지도하는 수업의 일부이다. (나)는 피아제(J. Piaget)와 딘즈(Z. Dienes)의 이론에 대한 오 교사와 김 교사의 대화의 일부이다.

(가)

김 교사 : 점 P를 원 O 위에서 움직이면서 원주각 $\angle APB$의 크기가 어떻게 변하는지 관찰해 봅시다. 여러분, 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 움직이면 $\angle APB$의 크기가 어떻게 변화하나요?

학 생 1 : 점 P를 움직여도 $\angle APB$의 크기가 30°로 변하지 않았어요.



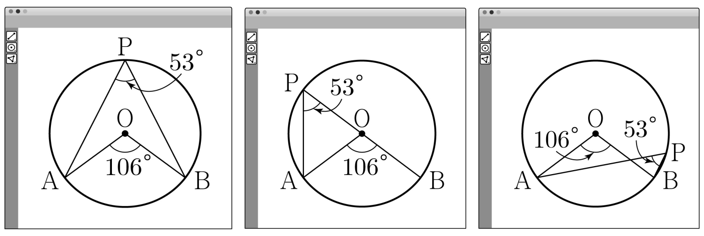
김 교사 : 잘 관찰했습니다. 이번에는 원 O에서 점 B를 움직여 호 AB의 길이를 바꾼 후 점 P를 움직여 보세요. 원주각의 크기가 어떻게 변화하나요?

학 생 2 : 점 P를 움직였는데, 호 AB에 대한 원주각이 여러 개 생기지만 그 크기는 항상 같았어요.

김 교사 : 이제 원주각의 크기와 중심각의 크기 사이의 관계를 관찰해 봅시다. 이때도 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 움직이면서 중심각 $\angle AOB$의 크기와 원주각 $\angle APB$의 크기의 측정값을 비교해 보세요. 무엇을 발견했나요?

학 생 1 : 원주각 $\angle APB$의 크기가 중심각 $\angle AOB$의 크기의 $\frac{1}{2}$인 것 같아요.

김 교사 : 네, 그렇네요. 한 호에서 여러 개의 원주각을 만들 수 있어요. 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 더 움직여 보면서 원주각과 중심각의 크기를 좀 더 관찰해 봅시다.



학 생 2 : 점 P의 위치와 관계 없이 $\angle APB$는 호 AB에 대한 원주각이고 그때 각의 크기가 같으니까, 원주각과 중심각의 크기의 관계는 언제나 똑같아요. 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

김 교사 : 잘 관찰했습니다. 지금까지 탐구형 소프트웨어를 활용해 관찰한 원주각의 성질을 문장으로 만들어 봅시다. 누가 발표해 볼까요?

학 생 1 : 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같습니다. 그리고 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

김 교사 : 잘 만들었어요. 이제, 이러한 성질을 자세하게 분석해 봅시다.

[이후, 원주각 크기와 중심각 크기 사이의 관계를 연역적으로 정당화하는 교수·학습이 이루어진다.]

(나)

오 교사 : 피아제는 반영적 추상화를 내용과 형식의 끊임없는 교대 작용으로 설명합니다. 피아제의 영향을 받은 딘즈도 지식의 성장 과정을 같은 방식으로 설명합니다. 구체적으로, 딘즈는 지식의 성장 과정을 개폐 연속체 개념으로 설명합니다.

김 교사 : 닫힌 상태는 '형식'으로 정리된 상태인데, 그 다음에 열린 상태는 '내용'으로 열리게 된 것이지요?

오 교사 : 맞습니다. 이런 의미에서 딘즈는 수학 교수·학습 원리 중 하나로 ㉠<u>'수학적 대상을 먼저 구성하고 그 대상에 대해 분석해야 한다.'</u>라는 원리를 제안한 바 있는데, 물론 분석한 결과인 '닫힌' 형식은 그 다음 수준에서는 '열린' 상태의 탐구 내용이 됩니다.

딘즈의 수학적 다양성의 원리가 (가)에서 어떻게 적용되고 있는지를 수업 내용과 관련시켜 구체적으로 서술하시오. 또한 딘즈의 밑줄 친 ㉠의 원리의 명칭을 쓰고, 이 원리가 (가)에서 어떻게 적용되고 있는지를 서술하시오. [4점]

4. (가)는 정 교사와 박 교사가 평행사변형의 지도에 대해 나눈 대화의 일부이고, (나)는 박 교사가 중학교에서 평행사변형의 성질을 지도하는 수업의 일부이다.

(가)

정 교사 : 완성된 수학의 논리적인 전개 순서를 반영하여 평행사변형의 성질을 지도하는 것이 수월하다고 생각해요. 평행사변형의 정의를 먼저 제시한 후 그 성질들 각각을 정당화하도록 하는 방식이 논리적이지 않나요?

박 교사 : 저는 다른 방식으로 지도합니다. 학생들에게 평행사변형의 정의를 처음부터 제시하지 않고, ▱ 처럼 생긴 도형을 평행사변형으로 부르도록 안내한 후 평행사변형의 성질을 먼저 찾아보게 합니다. 그런 다음, ㉠ 학생들이 찾은 평행사변형의 성질들이 서로 어떻게 관련되는지를 탐구하게 합니다.

(나)

박 교사 : 여러분, 평행사변형은 어떤 성질이 있는 도형인지 말해 봅시다.

학 생 1 : 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행하고 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같고, 두 대각선은 서로를 이등분해요. 그리고 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같고, 이웃하는 두 내각의 크기의 합은 180° 예요.

박 교사 : 잘 알고 있네요. 그럼 여러분이 찾은 평행사변형의 성질들 사이의 관계를 살펴봅시다. 서로 어떤 관계가 있을까요?

학 생 1 : 평행사변형에서 두 쌍의 대변이 각각 평행하다는 것과 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다는 것은 서로 관계가 없는 것 같은데요. 잘 모르겠어요.

프로이덴탈(H. Freudenthal)의 국소적 조직화 관점에서 (가)의 박 교사가 밑줄 친 ㉠을 통해 평행사변형의 정의를 지도하는 방식을 지칭하는 용어를 쓰고, 그 방식을 설명하시오.

또한 반 힐레(P. van Hiele)의 기하 학습 수준 이론에서 학습 수준을 제1수준~제5수준으로 구분할 때, (나)에서 학생 1의 기하 학습 수준을 쓰고, 그렇게 판단한 근거를 설명하시오. [4점]

5. 다음은 어떤 교수가 예비교사를 대상으로 분석법을 다루는 수업의 일부이다.

예비교사 : 옛날 사람들이 삼각형의 내접원을 작도하는 방법을 처음에 어떻게 찾았는지 궁금해요.

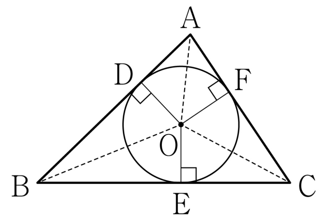
교　　수 : 분석법을 통해 찾은 것으로 알려져 있는데요. 우리도 직접 찾아보도록 하지요. 작도법을 찾는 문제는 일종의 답을 찾는 문제라 할 수 있으니까, 방정식 문제를 해결할 때처럼 해 봅시다. 먼저, 분석법을 적용해서 방정식 문제를 해결할 때 어떻게 시작했나요?

예비교사 : (　　　㉠　　　)

교　　수 : 네. 그렇습니다. 삼각형에 내접하는 원의 작도법을 찾는 문제를 해결할 때에도 같은 방식으로 시작해 봅시다. 그럼, 이 작도 문제를 해결할 때 어떻게 시작하면 될까요?

예비교사 : (　　　㉡　　　)

교　　수 : 그림을 그릴게요. 원의 중심 O로부터 삼각형의 각 변 AB, BC, CA에 각각 수선의 발 D, E, F를 내려 봅시다. 세 수선의 길이는 서로 어떻게 되나요?



예비교사 : 원의 반지름이니까, 서로 같아요.

교　　수 : 원의 중심 O에서 $\triangle ABC$의 각 꼭짓점으로 선분 OA, OB, OC를 그어 볼까요? 그러면, $\triangle ODB$와 $\triangle OEB$는 서로 어떤 관계인가요?

예비교사 : 서로 합동이 돼요. RHS 합동이니까요.

교　　수 : $\triangle ODA$와 $\triangle OFA$는 어떤 관계이고, $\triangle OFC$와 $\triangle OEC$는 어떤 관계인가요?

예비교사 : 마찬가지로, RHS 합동에 의해 서로 합동이 돼요.

교　　수 : 그러면 선분 OA, OB, OC에 의해 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$는 각각 어떻게 되나요?

예비교사 : 이등분이 돼요.

교　　수 : 그런데 지금까지 유도된 결과들을 잘 살펴보면, '작도법'이 무엇인지 짐작할 수 있어요. 예를 들어, $\angle A$와 $\angle B$를 이등분하는 두 직선의 교점을 찾고 그 교점으로부터 수선의 발을 내리게 되면, 앞의 것은 원의 중심을 작도하는 것이고 뒤의 것은 원의 반지름을 작도하는 것이라는 생각이 들지 않나요?

예비교사 : 정말 그럴듯한데요. 삼각형의 내접원을 작도하는 법을 어떻게 추측해 냈는지 알 것 같아요.

괄호 안의 ㉠, ㉡에 적합한 내용을 순서대로 쓰시오. 또한 분석법이 지니는 수학교육적 의미를 1가지 기술하고, 이를 뒷받침하는 근거를 이 수업에서 찾아 제시하시오. [4점]

6. 가우스 정수환(ring of Gaussian integers) $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$는 유클리드 노름(Euclidean norm)이 $\nu(a+bi)=a^2+b^2$인 유클리드 정역(Euclidean domain)이다. $\alpha=1-3i$와 $\beta=3-4i$를 포함하는 $\mathbb{Z}[i]$의 가장 작은 아이디얼(이데알, ideal)을 I라 하자. $\eta\neq 0$인 $\eta\in I$에 대하여 $\nu(\eta)$의 최솟값과 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}[i]/I$의 표수(characteristic)를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

7. 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g:\mathbb{R}\to\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$라 하자. $\lim_{n\to\infty} n\left\{g\left(1+\frac{3}{n}\right)-g(1)\right\}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^2}\,dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

8. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x, y)$를

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 2 - y < 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

라 하고 확률변수 Z를 $Z = Y - X$라 하자. Z의 누적분포함수(cumulative distribution function) $G(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $g(z)$를 Z의 확률밀도함수(probability density function)라 할 때, $\mathrm{P}\left(g(Z) > \frac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

9. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면 M, N을

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z = 0\},$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

이라 하고, 곡선 γ를 M과 N의 교선이라 하자. 곡면 M에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)과 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

10. $11 \le k \le 20$ 인 정수 k에 대하여 합동식

$$x^2 + 23x - k \equiv 0 \pmod{75}$$

의 정수해가 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

11. 복소방정식 $z^3 - z - 4 = 0$이 영역 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$에서 갖는 근의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 선적분 $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

(단, 다중근의 경우 중복되는 수만큼 근의 개수로 인정한다.) [4점]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> 함수 $f(z)$와 $g(z)$가 단순닫힌곡선(simple closed curve) γ와 그 내부에서 해석적이라 하자. 곡선 γ 위의 모든 점 z에 대하여 부등식 $|g(z)| < |f(z)|$이 성립하면 두 함수 $f(z)$와 $f(z)+g(z)$는 γ 내부에서 같은 개수의 영점(zero)을 갖는다.

<수고하셨습니다.>